NGUYỄN ĐÌNH HOÀN



Kính lúp table 19

Casio Citizen

Phương pháp nâng lũy thừa trong bài toán phương trình hàm số logarit

I. BÀI TẬP VÍ DỤ

Ví dụ 1: Giải phương trình: $\log_5(3x-1)+\log_{0,2}\left(\sqrt{3-2x^2}+2-x\right)=\log_{\sqrt{5}}\sqrt{3-2x}$.

Phân tích:

Khi đối mặt với những bài toán có chứa hàm số logarit, chúng ta cần phải nghĩ ngay tới việc khử logarit bằng các công thức biến đổi logarit và mục đích là để đưa tất cả các logarit trong bài toán về cùng cơ số. Ở bài toán trên, không khó để có thể đưa phương trình về logarit cơ số 5 như sau:

$$\log_5(3x-1)-\log_5\left(\sqrt{3-2x^2}+2-x\right)=\log_5(3-2x).$$

Sau đó chúng ta sử dụng: $\log_a b+\log_a c=\log_a(bc)$ và $\log_a b-\log_a c=\log_a\left(\frac{b}{c}\right)$ đưa bài toán về dạng cơ bản hơn: $\frac{3x-1}{\sqrt{3-2x^2}+2-x}=3-2x$.

Để giải phương trình trên, ta đưa về dạng: $f(x)\sqrt{g(x)}=h(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x).h(x)\ge 0\\ f^2(x).g(x)=h^2(x)\end{cases}$.

Bài giải:

Điều kiện xác định: $\begin{cases}3x-1>0\\ \sqrt{3-2x^2}+2-x>0\\ 3-2x>0\\ 3-2x^2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\frac{1}{3}<x\le\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Ta có phương trình: $\log_5(3x-1)+\log_{0,2}\left(\sqrt{3-2x^2}+2-x\right)=\log_{\sqrt{5}}\sqrt{3-2x}$

$$\Leftrightarrow\log_5(3x-1)+\log_{5^{-1}}\left(\sqrt{3-2x^2}+2-x\right)=\log_{5^{\frac{1}{2}}}(3-2x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow\log_5(3x-1)-\log_5\left(\sqrt{3-2x^2}+2-x\right)=\log_5(3-2x)$$

$$\Leftrightarrow\log_5\left(\frac{3x-1}{\sqrt{3-2x^2}+2-x}\right)=\log_5(3-2x)\Leftrightarrow\frac{3x-1}{\sqrt{3-2x^2}+2-x}=3-2x$$

$\Leftrightarrow 3x-1=(3-2x)\sqrt{3-2x^2}+2x^2-7x+6 \Leftrightarrow (3-2x)\sqrt{3-2x^2}=-2x^2+10x-7$

Bình phương hai vế: $(3-2x)^2(3-2x^2)=(-2x^2+10x-7)^2$

(Đặt điều kiện: $(3-2x)(-2x^2+10x-7)\geq 0(*)$)

Phương trình trên tương đương với: $12x^4-64x^3+134x^2-104x+22=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(12x^3-52x^2+82x-22)=0 \Leftrightarrow (x-1)(3x-1)(4x^2-16x+22)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0(TM) \\ 3x-1=0(L) \\ 4x^2-16x+22=0(VN) \end{array}\right. \Leftrightarrow x=1.$$

Kết luận: Vậy phương trình có một nghiệm duy nhất: $x=1$.

Bình luận:

Bài toán trên không quá khó khăn để khử hàm số logarit để có thể đưa về phương trình vô tỷ căn bản dạng: $f(x)\sqrt{g(x)}=h(x)$. Tuy nhiên chúng ta cần phải nhớ cách chia đa thức hoặc sử dụng sơ đồ Horner để có thể giảm bậc của phương trình sau khi bình phương, và cần chú ý đặc biệt các điều kiện khi bình phương hai vế.

Chúng ta còn có thể sử dụng kĩ thuật chia đa thức bằng máy tính CASIO để bài toán trở nên ngắn gọn hơn mà tác giả sẽ đề cập đến các chủ đề sau của cuốn sách. Ngoài ra các bạn cần chú ý tới những điều sau:

- Với mọi phương trình từ bậc thấp đến bậc cao, tổng các hệ số bằng 0 thì phương trình đó luôn luôn có nghiệm $x=1$.
- Với mọi phương trình từ bậc thấp đến bậc cao, tổng các hệ số bậc chẵn bằng tổng các hệ số bậc lẻ thì phương trình luôn luôn có nghiệm $x=-1$.

Ví dụ 2: Giải phương trình: $1+\log_2 x=\log_2\left(\sqrt{2x+1}+1\right)+\log_4\left(3x-\sqrt{10x+24}\right)$.

Bài giải:

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x>0 \\ \sqrt{2x+1}+1>0 \\ 3x-\sqrt{10x+24}>0 \\ 10x+24\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge\dfrac{5+\sqrt{241}}{9}$.

Ta có phương trình: $1+\log_2 x=\log_2\left(\sqrt{2x+1}+1\right)+\log_4\left(3x-\sqrt{10x+24}\right)$

$\Leftrightarrow \log_2 2+\log_2 x=\log_2\left(\sqrt{2x+1}+1\right)+\log_{2^2}\left(3x-\sqrt{10x+24}\right)$

$\Leftrightarrow \log_2(2x)=\log_2\left(\sqrt{2x+1}+1\right)+\log_2\left(\sqrt{3x-\sqrt{10x+24}}\right)$

$\Leftrightarrow \log_2(2x)=\log_2\left[\left(\sqrt{2x+1}+1\right)\sqrt{3x-\sqrt{10x+24}}\right] \Leftrightarrow 2x=\left(\sqrt{2x+1}+1\right)\sqrt{3x-\sqrt{10x+24}}$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x+1}+1\right)\left(\sqrt{2x+1}-1\right)=\left(\sqrt{2x+1}+1\right)\sqrt{3x-\sqrt{10x+24}} \Leftrightarrow \sqrt{2x+1}-1=\sqrt{3x-\sqrt{10x+24}}$ (Do: $\sqrt{2x+1}+1>0\ \forall x>0$)

$\Leftrightarrow \sqrt{2x+1}=1+\sqrt{3x-\sqrt{10x+24}}$. Bình phương hai vế ta được:

$\Leftrightarrow 2x+1=1+3x-\sqrt{10x+24}+2\sqrt{3x-\sqrt{10x+24}} \Leftrightarrow \sqrt{10x+24}-x=2\sqrt{3x-\sqrt{10x+24}}$

Tiếp tục bình phương hai vế ta được: $x^2+10x+24-2x\sqrt{10x+24}=4\left(3x-\sqrt{10x+24}\right)$

$\Leftrightarrow x^2-2x+24=(2x-4)\sqrt{10x+24}$ .Tiếp tục tục bình phương hai vế ta có phương trình

$\Leftrightarrow \left(x^2-2x+24\right)^2=(2x-4)^2(10x+24)$

$\Leftrightarrow x^4-44x^3+116x^2+128x+192=0 \Leftrightarrow (x-4)\left(x^3-40x^2-44x-48\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x^3-40x^2-44x-48=0\ (*) \end{array}\right.$

Giải phương trình (*): Ta có các điều kiện sau:

$$3x > \sqrt{10x+24} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 9x^2 - 10x - 24 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{5+\sqrt{241}}{9} > 2.(1).$$

Lại có: $\sqrt{10x+24} - x = 2\sqrt{3x - \sqrt{10x+24}} > 0 \Rightarrow \sqrt{10x+24} > x \Leftrightarrow -2 < x < 12.(2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow x \in (2;12)$. Vậy: Ta chứng minh $x^3 - 40x^2 - 44x - 48 = 0$ vô nghiệm bằng cách lập bảng biến thiên. Xét hàm số: $f(x) = x^3 - 40x^2 - 44x - 48$ với $x \in (2;12)$ ta có:

$$f'(x) = 3x^2 - 80x - 44 < 0, \forall x \in (2;12)$$

Lập bảng biến thiên:

x	2		12
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	-288	↘	-4608

Từ bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ luôn nhỏ hơn 0 với mọi $x \in (2;12)$. Vậy phương trình (*) vô nghiệm trên khoảng $(2;12)$.

Kết luận: Vậy phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất : $x = 4$.

Bình luận:

Bài toán có hai vấn đề khó khăn chính:

- Thứ nhất là việc phân tích $2x = \left(\sqrt{2x+1}+1\right)\left(\sqrt{2x+1}-1\right)$. Đây là kỹ thuật liên hợp ngược trong giải toán phương trình vô tỷ.
- Thứ hai, đó là chúng ta gặp phải một phương trình bậc 3 có nghiệm rất xấu (nghiệm lẻ và khó biểu diễn dưới dạng căn). Tuy nhiên chúng ta không thể ghi kết quả nghiệm xấp xỉ vào bài làm, hơn nữa đây là nghiệm không thỏa mãn điều kiện, vì vậy ta cần khai thác triệt để các điều kiện đồng thời tiến hành khảo sát chứng minh phương trình bậc ba vô nghiệm trên khoảng đã chỉ ra.

Ví dụ 3: Giải phương trình: $\log_9 x = \log_{\frac{1}{3}}\left(1-\sqrt{x}\right) + \log_3\left(\sqrt{2\left(x^2-x+1\right)}-1\right)$.

Phân tích:

Bài toán trên không quá khó khăn để khử logarit thu được phương trình:

$$\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right) = \sqrt{2\left(x^2-x+1\right)}-1.$$

Đến đây , ta bình phương hai vế để thực hiện việc khử căn thức đưa về phương trình vô tỷ dạng cơ bản.

Bài giải:

Cách 1: Nâng lũy thừa không hoàn toàn:

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x > 0 \\ 1-\sqrt{x} > 0 \\ \sqrt{2\left(x^2-x+1\right)}-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 1.$

Ta có phương trình: $\log_9 x = \log_{\frac{1}{3}}\left(1-\sqrt{x}\right) + \log_3\left(\sqrt{2\left(x^2-x+1\right)}-1\right)$

$$\Leftrightarrow \log_{3^2} x = \log_{3^{-1}}\left(1-\sqrt{x}\right) + \log_3\left(\sqrt{2\left(x^2-x+1\right)}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow \log_3 \sqrt{x} = -\log_3\left(1-\sqrt{x}\right) + \log_3\left(\sqrt{2\left(x^2-x+1\right)}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow \log_3 \sqrt{x} + \log_3\left(1-\sqrt{x}\right) = \log_3\left(\sqrt{2\left(x^2-x+1\right)}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow \log_3\left[\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)\right] = \log_3\left(\sqrt{2\left(x^2-x+1\right)}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right) = \sqrt{2\left(x^2-x+1\right)}-1 \Leftrightarrow \sqrt{x}-\left(x-1\right) = \sqrt{2\left(x^2-x+1\right)}.$$

Bình phương hai vế ta được:

$$\Leftrightarrow \left(x-1\right)^2 - 2\left(x-1\right)\sqrt{x} = 2x^2-2x+2 \Leftrightarrow x^2-x+1+2\left(x-1\right)\sqrt{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x+1+2(x-1)\sqrt{x}+x=0 \Leftrightarrow \left(x-1+\sqrt{x}\right)^2=0 \Leftrightarrow x-1+\sqrt{x}=0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}=1-x \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 1 \\ x^2-3x+1=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Kết luận: Vậy phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất: $x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Cách 2: Nâng lũy thừa hoàn toàn:

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x>0 \\ 1-\sqrt{x}>0 \\ \sqrt{2\left(x^2-x+1\right)}-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<x<1.$

Ta có phương trình: $\log_9 x=\log_{\frac{1}{3}}\left(1-\sqrt{x}\right)+\log_3\left(\sqrt{2\left(x^2-x+1\right)}-1\right)$

$$\Leftrightarrow \log_{3^2} x=\log_{3^{-1}}\left(1-\sqrt{x}\right)+\log_3\left(\sqrt{2\left(x^2-x+1\right)}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow \log_3 \sqrt{x}=-\log_3\left(1-\sqrt{x}\right)+\log_3\left(\sqrt{2\left(x^2-x+1\right)}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow \log_3 \sqrt{x}+\log_3\left(1-\sqrt{x}\right)=\log_3\left(\sqrt{2\left(x^2-x+1\right)}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow \log_3\left[\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)\right]=\log_3\left(\sqrt{2\left(x^2-x+1\right)}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)=\sqrt{2\left(x^2-x+1\right)}-1 \Leftrightarrow \sqrt{x}-(x-1)=\sqrt{2\left(x^2-x+1\right)}.$$

Bình phương hai vế ta được:

$$\Leftrightarrow (x-1)^2-2(x-1)\sqrt{x}=2x^2-2x+2 \Leftrightarrow x^2-x+1+2(x-1)\sqrt{x}=0$$

$\Leftrightarrow x^2-x+1=2(1-x)\sqrt{x}$. Do 2 vế không âm, bình phương 2 vế, ta được phương trình

$$\Leftrightarrow \left(x^2-x+1\right)^2=4(1-x)^2 x \Leftrightarrow x^4-6x^3+11x^2-6x+1=0 \Leftrightarrow \left(x^2-3x+1\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\,(L) \\ x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\,(TM) \end{array}\right. \Rightarrow x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Kết luận: Vậy phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất: $x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Cách 3: Nâng lũy thừa hoàn toàn kết hợp với ẩn phụ:

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x>0 \\ 1-\sqrt{x}>0 \\ \sqrt{2\left(x^2-x+1\right)}-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<x<1.$

Ta có phương trình: $\log_9 x=\log_{\frac{1}{3}}\left(1-\sqrt{x}\right)+\log_3\left(\sqrt{2\left(x^2-x+1\right)}-1\right)$

$$\Leftrightarrow \log_{3^2} x=\log_{3^{-1}}\left(1-\sqrt{x}\right)+\log_3\left(\sqrt{2\left(x^2-x+1\right)}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow \log_3 \sqrt{x}=-\log_3\left(1-\sqrt{x}\right)+\log_3\left(\sqrt{2\left(x^2-x+1\right)}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow \log_3 \sqrt{x}+\log_3\left(1-\sqrt{x}\right)=\log_3\left(\sqrt{2\left(x^2-x+1\right)}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow \log_3\left[\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)\right]=\log_3\left(\sqrt{2\left(x^2-x+1\right)}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)=\sqrt{2\left(x^2-x+1\right)}-1 \Leftrightarrow \sqrt{x}-\left(x-1\right)=\sqrt{2\left(x^2-x+1\right)}.$$

Bình phương hai vế ta được:

$$\Leftrightarrow \left(x-1\right)^2-2\left(x-1\right)\sqrt{x}=2x^2-2x+2 \Leftrightarrow x^2-x+1+2\left(x-1\right)\sqrt{x}=0$$

$\Leftrightarrow x^2-x+1=2\left(1-x\right)\sqrt{x}$. Do 2 vế không âm, bình phương 2 vế, ta được phương trình

$$\Leftrightarrow \left(x^2-x+1\right)^2=4\left(1-x\right)^2 x \Leftrightarrow x^4-6x^3+11x^2-6x+1=0$$

Trường hợp 1: $x=0$ không thỏa mãn phương trình.

Trường hợp 1: $x\neq 0$ **,** chia cả 2 vế của phương trình cho x^2,ta được phương trình:

$$x^2-6x+11-\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}=0\Leftrightarrow\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-6\left(x+\frac{1}{x}\right)+11=0$$

Đặt: $t=x+\frac{1}{x}\Rightarrow t^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2\Rightarrow t^2-2=x^2+\frac{1}{x^2}$, thay vào phương trình trên, ta có:

$$t^2-2-6t+11=0\Leftrightarrow t^2-6t+9=0\Leftrightarrow(t-3)^2=0\Leftrightarrow t=3\Rightarrow x+\frac{1}{x}=3$$

$$\Leftrightarrow x^2+1=3x\Leftrightarrow x^2-3x+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{3+\sqrt{5}}{2}(L)\\x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}(TM)\end{array}\right.\Rightarrow x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Kết luận: Vậy phương trình đã cho có một nghiệm duy nhất: $x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Bình luận:

Bài toán trên là một trong những bài toán cổ điển về nghiệm kép vô tỷ, tác giả sẽ đi sâu về vấn đề này ở phần sau cuốn sách để bạn đọc có những cách giải hay và tối ưu cho bài toán này. Cách giải 1 và cách giải 2 là những cách giải khôn khéo khi bạn đọc có thể nhìn ra bình phương của biểu thức 3 số hạng. Trong cách giải số 3, ta chú ý rằng với phương trình $ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ trong đó $\frac{e}{a}=\left(\frac{d}{b}\right)^2\neq 0$, ta có thể giải bài toán theo hướng chia cả hai vế cho x^2 (Chú ý cần xét $x\neq 0, x=0$).

Ví dụ 4: Giải bất phương trình:

$$\log_3\left(\frac{\sqrt{x+24}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+24}-\sqrt{x}}\right)+\log_3 8<3+\log_3\left(\frac{12+x-\sqrt{x^2+24x}}{12+x+\sqrt{x^2+24x}}\right).$$

Phân tích:

Bài toán trên có hình thức khá cồng kềnh trong hàm số logarit, nhưng không quá khó khăn để khử hàm số logarit để đưa về bất phương trình sau:

$$\frac{\sqrt{x+24}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+24}-\sqrt{x}}<\frac{27}{8}\left(\frac{12+x-\sqrt{x^2+24x}}{12+x+\sqrt{x^2+24x}}\right)$$

Khi gặp những bất phương trình hay phương trình cồng kềnh như trên, ta cần phải có sự quan sát chứ không nên biến đổi khi chưa có sự quan sát. Nhận thấy rằng:

$$12+x-\sqrt{x^2+24x}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x+24}-\sqrt{x}\right)^2 \text{ và } 12+x+\sqrt{x^2+24x}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x+24}+\sqrt{x}\right)^2 .$$

Nếu quan sát được điều này, bài toán coi như đã được giải quyết một cách gọn nhẹ.

Bài giải:

Điều kiện xác định: $x \geq 0$.

Ta có bất phương trình: $\log_3\left(\frac{\sqrt{x+24}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+24}-\sqrt{x}}\right)+\log_3 8<3+\log_3\left(\frac{12+x-\sqrt{x^2+24x}}{12+x+\sqrt{x^2+24x}}\right)$

$$\Leftrightarrow \log_3\left(\frac{\sqrt{x+24}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+24}-\sqrt{x}}\right)<\log_3 27-\log_3 8+\log_3\left(\frac{12+x-\sqrt{x^2+24x}}{12+x+\sqrt{x^2+24x}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \log_3\left(\frac{\sqrt{x+24}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+24}-\sqrt{x}}\right)<\log_3\left(\frac{27}{8}\right)+\log_3\left(\frac{12+x-\sqrt{x^2+24x}}{12+x+\sqrt{x^2+24x}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \log_3\left(\frac{\sqrt{x+24}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+24}-\sqrt{x}}\right)<\log_3\left[\left(\frac{27}{8}\right)\left(\frac{12+x-\sqrt{x^2+24x}}{12+x+\sqrt{x^2+24x}}\right)\right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+24}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+24}-\sqrt{x}}<\frac{27}{8}\left(\frac{12+x-\sqrt{x^2+24x}}{12+x+\sqrt{x^2+24x}}\right)=\frac{27}{8}\left(\frac{24+2x-2\sqrt{x}\sqrt{x+24}}{24+2x+2\sqrt{x}\sqrt{x+24}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x+24}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+24}-\sqrt{x}}<\frac{27}{8}\frac{\left(\sqrt{x+24}-\sqrt{x}\right)^2}{\left(\sqrt{x+24}+\sqrt{x}\right)^2}\Leftrightarrow\left(\frac{\sqrt{x+24}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+24}-\sqrt{x}}\right)^3<\frac{27}{8}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x+24}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+24}-\sqrt{x}}<\frac{3}{2}$$

Do 2 vế không âm, nhân chéo 2 vế, ta có: $2\left(\sqrt{x+24}+\sqrt{x}\right)<3\left(\sqrt{x+24}-\sqrt{x}\right)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+24}>5\sqrt{x}\Leftrightarrow x+24>25x\Leftrightarrow 24>24x\Leftrightarrow x<1$$

Kết hợp điều kiện xác định, suy ra $0 \le x < 1$

Kết luận: Vậy tập nghiệm của bất phương trình: $S = [0;1)$.

Bình luận:

Với mỗi bài toán quá cồng kềnh về mặt hình thức thì đa số có thể sẽ rút gọn được hoặc là sự tạo thành từ hằng đẳng thức nào đó. Chúng ta cần phải có sự quan sát kĩ lưỡng trước mỗi bước biến đổi thì bài toán sẽ trở lên đơn giản hơn.

Ví dụ 5: Giải phương trình:

$$1+\frac{3}{2}\log_{\sqrt{2}}\left(x+\sqrt{2x-1}\right)^2 = 2\log_2(8).\log_4\left(\sqrt{3x^2+6x}-2+2x\sqrt{2x-1}+x\right)+\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}2017.\log_{2017}2$$

Bài giải:

Điều kiện xác định: $x \ge \frac{1}{2}$, $\sqrt{3x^2+6x}-2+2x\sqrt{2x-1}+x > 0$.

Ta có: $\log_a b.\log_b c = \log_a c \Rightarrow \log_{\sqrt{2}}2017.\log_{2017}2 = 2\log_2 2017.\log_{2017}2 = 2\log_2 2 = 2$.

Ta biến đổi phương trình trở thành: $\log_2\left(x+\sqrt{2x-1}\right)^2 = \log_2\left(\sqrt{3x^2+6x}-2+2x\sqrt{2x-1}+x\right)$

$\Leftrightarrow \left(x+\sqrt{2x-1}\right)^2 = \sqrt{3x^2+6x}-2+2x\sqrt{2x-1}+x \Leftrightarrow x^2+x+1 = \sqrt{3x^2+6x}$.

Bình phương hai vế ta được:

$$x^4+2x^3-4x+1=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^3+3x^2+3x-1\right)=0 \quad (*).$$

Ta chứng tỏ rằng phương trình $x^3+3x^2+3x-1=0$ vô nghiệm.

Thật vậy, ta có hai cách xử lý như sau:

Cách 1: Sử dụng phương pháp lập bảng biến thiên của hàm số:

Xét hàm số: $f(x) = x^3+3x^2+3x-1$ với $x \in \left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ ta có:

$$f'(x) = 3x^2+6x+3 > 0, \forall x \in \left(\frac{1}{2};+\infty\right).$$

Ta có bảng biến thiên như sau:

x	$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$\frac{11}{8}$	↗	$+\infty$

Ta thấy phương trình $x^3+3x^2+3x-1=0$ vô nghiệm với $x\in\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Như vậy $(*)\Leftrightarrow x=1$ (Thỏa mãn điều kiện xác định).

Cách 2: Sử dụng hằng đẳng thức bậc 3:

Ta có: $x^3+3x^2+3x-1=0\Leftrightarrow x^3+3x^2+3x+1=2$

$\Leftrightarrow (x+1)^3=2\Leftrightarrow x+1=\sqrt[3]{2}\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{2}-1$ (Không thỏa mãn điều kiện xác định).

Như vậy $(*)\Leftrightarrow x=1$ (Thỏa mãn điều kiện xác định).

Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất đó là $x=1$.

Bình luận:

Đối với phương trình bậc 3 có chứa nghiệm lẻ, ta có rất nhiều các cách xử lí và trong bài toán trên chúng ta đã tiếp cận 2 cách xử lí cơ bản để bạn đọc có thể áp dụng khi đối mặt với những bài tương tự. Sau đây, tác giả muốn gửi gắm đến các độc giả một số bài tập áp dụng để bạn đọc có cơ hội rèn luyện thêm và hiểu kĩ lưỡng hơn về vấn đề 2 này.

II. BÀI TẬP ÁP DỤNG:

Bài toán 1: Giải phương trình sau trên tập số thực:

$$\log_2\left(\sqrt{x+1}+1\right)+\log_4\left(x-\sqrt{x+8}\right)=\log_4\left(x^2\right)$$

Bài toán 2: Giải phương trình sau trên tập số thực:

$$\log_8\left(x^3\right)+\log_4\left(\left(x-1\right)^2+3\right)=\log_2\left(x+2\right)+\log_4\left(x^2-x-1\right)$$

Bài toán 3: Giải phương trình sau trên tập số thực:

$$1=\log_{0,25}\left(x^2-x+2\right)+\log_2\left(x-2+\sqrt{2x^2+4x}\right)$$

Bài toán 4: Giải phương trình sau trên tập số thực:

$$\frac{1}{2}+\log_9\left(2x^2+x+1\right)=\log_3\left(2x+\sqrt{x+1}\right)$$

Bài toán 5: Giải bất phương trình sau trên tập số thực:

$$\log_4\left(1-x\right)\ge\log_{0,25}\left(1+x\right)+\log_2\left(\sqrt{2-3x-4x^2}-\sqrt{x}\right)$$

Bài toán 6: Giải bất phương trình sau trên tập số thực:

$$\frac{3}{2}+\log_2\left(2x^2+3x\right)+\log_4\left(x+2\right)\ge\log_2\left(2x^3+7x^2+14x+12\right)$$

Bài toán 7: Giải phương trình sau trên tập số thực:

$$\log_3\left(x-1\right)=\log_{27}\left(x^2-2x+1\right)+\log_9\left(x-7+2\sqrt{x-8}\right)$$

Bài toán 8: Giải phương trình sau trên tập số thực:

$$\ln\left(x-\sqrt{x+3}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(2x^2+2x+6\right)=\ln\left(x^2-x-3\right)$$

Bài toán 9: Giải phương trình sau trên tập số thực:

$$\log_2\left(x^2+16x+19\right)=1+\log_2\left(x+2\right)+\log_2\left(\sqrt{2x^2+16x+18}-\sqrt{x^2-1}\right)$$

Bài toán 10: Giải phương trình sau trên tập số thực:

$$1+\log_{\frac{1}{3}}\left(\sqrt{2x^2-7}+\sqrt{2x^2-4}\right)=\log_3\left(x-\sqrt{x^2-3}\right)$$

Bài toán 11: Giải phương trình sau trên tập số thực:

$$1+\log_2(x+1)+\log_4(2x-1)+\log_{0,25}\left(2x^3-x^2+6x-3\right)=\log_4\left(x^2+x+2\right)$$

Bài toán 12: Giải phương trình sau trên tập số thực:

$$\log_3\left(\frac{8}{\sqrt{2x+7}+\sqrt{2x-1}}\right)+\log_{\frac{1}{3}}\left(\sqrt{x+8}-\sqrt{x}\right)=\log_3\left(\frac{x+4-\sqrt{x^2+8x}}{2x+3-\sqrt{4x^2+12x-7}}\right)$$

IV. HƯỚNG DẪN GIẢI:

Bài 1: Giải phương trình: $\log_2\left(\sqrt{x+1}+1\right)+\log_4\left(x-\sqrt{x+8}\right)=\log_4\left(x^2\right)$.

Điều kiện xác định: $x>\sqrt{x+8}\geq 0$.Ta có phương trình tương đương với:

$$\log_2\left(\sqrt{x+1}+1\right)+\log_2\left(\sqrt{x-\sqrt{x+8}}\right)=\log_2\left(\sqrt{x^2}\right)\Leftrightarrow\left(\sqrt{x+1}+1\right)\sqrt{x-\sqrt{x+8}}=|x|$$

Vì $x>\sqrt{x+8}\geq 0$ do đó:

$$\left(\sqrt{x+1}+1\right)\sqrt{x-\sqrt{x+8}}=x=\left(\sqrt{x+1}+1\right)\left(\sqrt{x+1}-1\right)\Leftrightarrow\sqrt{x-\sqrt{x+8}}+1=\sqrt{x+1}$$

Do 2 vế không âm, bình phương 2 vế , ta được phương trình:

$$x+1-\sqrt{x+8}+2\sqrt{x-\sqrt{x+8}}=x+1\Leftrightarrow\sqrt{x+8}=2\sqrt{x-\sqrt{x+8}}$$

Do 2 vế không âm, bình phương 2 vế lần 2 , ta được phương trình:

$$x+8=4x-4\sqrt{x+8}\Leftrightarrow 4\sqrt{x+8}=3x-8\Leftrightarrow\begin{cases}3x-8\geq 0\\16(x+8)=(3x-8)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{8}{3} \\ 9x^2 - 64x - 64 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \dfrac{8}{3} \\ \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{8}{9}(L) \\ x = 8(TM) \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 8.$$

Kết luận: Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm duy nhất: $x = 8$.

Bài 2: Giải phương trình: $\log_8\left(x^3\right) + \log_4\left(\left(x-1\right)^2 + 3\right) = \log_2\left(x+2\right) + \log_4\left(x^2 - x - 1\right)$.

Điều kiện xác định: $x > 0$.

Ta có phương trình: $\log_{2^3}\left(x^3\right) + \log_{2^2}\left(x^2 - 2x + 4\right) = \log_2\left(x+2\right) + \log_{2^2}\left(x^2 - x - 1\right)$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(x\right) + \log_2\left(\sqrt{x^2 - 2x + 4}\right) = \log_2\left(x+2\right) + \log_2\left(\sqrt{x^2 - x - 1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(x\sqrt{x^2 - 2x + 4}\right) = \log_2\left(\left(x+2\right)\sqrt{x^2 - x - 1}\right) \Leftrightarrow x\sqrt{x^2 - 2x + 4} = \left(x+2\right)\sqrt{x^2 - x - 1}$$

Do 2 vế không âm, bình phương 2 vế ta được phương trình:

$$x^2\left(x^2 - 2x + 4\right) = \left(x+2\right)^2\left(x^2 - x - 1\right) \Leftrightarrow 5x^3 - 5x^2 - 8x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-2\right)\left(5x^2 + 5x + 2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2 = 0 \\ 5x^2 + 5x + 2 = 0(VN) \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 2.$$

Kết luận: Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm duy nhất: $x = 2$.

Bài 3: Giải phương trình: $1 = \log_{0,25}\left(x^2 - x + 2\right) + \log_2\left(x - 2 + \sqrt{2x^2 + 4x}\right)$.

Đặt điều kiện xác định: $\sqrt{2x^2 + 4x} > 2 - x$.

Phương trình đã cho tương đương với: $1 = \log_{2^{-2}}\left(x^2 - x + 2\right) + \log_2\left(x - 2 + \sqrt{2x^2 + 4x}\right)$

$$\Leftrightarrow 1=\log_2\left(x-2+\sqrt{2x^2+4x}\right)-\log_2\left(\sqrt{x^2-x+2}\right)\Leftrightarrow \log_2 2=\log_2\left(\frac{x-2+\sqrt{2x^2+4x}}{\sqrt{x^2-x+2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2=\frac{x-2+\sqrt{2x^2+4x}}{\sqrt{x^2-x+2}}\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-x+2}=x-2+\sqrt{2x^2+4x}$$

Bình phương hai vế ta được: $4\left(x^2-x+2\right)=x^2-4x+4+2x^2+4x+2\left(x-2\right)\sqrt{2x^2+4x}$

$$\Leftrightarrow x^2-4x+4=2\left(x-2\right)\sqrt{2x^2+4x}\Leftrightarrow \left(x-2\right)^2=2\left(x-2\right)\sqrt{2x^2+4x}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\left(TM\right)\\ x-2=2\sqrt{2x^2+4x}\left(*\right)\end{array}\right.$$

Ta có (*) tương đương với: $\begin{cases}x\ge 2\\ \left(x-2\right)^2=4\left(2x^2+4x\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 2\\ 7x^2+20x-4=0\end{cases}$ (Vô nghiệm).

Kết luận: Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm duy nhất: $x=2$.

Bài 4: Giải phương trình: $\frac{1}{2}+\log_9\left(2x^2+x+1\right)=\log_3\left(2x+\sqrt{x+1}\right)$.

Điều kiện xác định: $2x+\sqrt{x+1}>0$. Ta có phương trình trở thành:

$$\log_3\sqrt{3}+\log_{3^2}\left(2x^2+x+1\right)=\log_3\left(2x+\sqrt{x+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \log_3\sqrt{3}+\log_3\left(\sqrt{2x^2+x+1}\right)=\log_3\left(2x+\sqrt{x+1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \log_3\left(\sqrt{3}\sqrt{2x^2+x+1}\right)=\log_3\left(2x+\sqrt{x+1}\right)\Leftrightarrow \sqrt{3}\sqrt{2x^2+x+1}=2x+\sqrt{x+1}$$

Bình phương hai vế ta được: $6x^2+3x+3=4x^2+x+1+4x\sqrt{x+1}$

$$\Leftrightarrow x^2-2x\sqrt{x+1}+x+1=0\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{x+1}\right)^2=0\Leftrightarrow x=\sqrt{x+1}\Leftrightarrow x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Kết luận: Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm duy nhất: $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Bài 5: Giải bất phương trình: $\log_4(1-x) \ge \log_{0,25}(1+x) + \log_2\left(\sqrt{2-3x-4x^2} - \sqrt{x}\right)$.

Điều kiện xác định: $\begin{cases} 1-x>0 \\ 1+x>0 \\ \sqrt{2-3x-4x^2}-\sqrt{x}>0 \\ 2-3x-4x^2 \ge 0 \\ x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \le x < \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$.

Bất phương trình tương đương với: $\log_{2^2}(1-x) \ge \log_{2^{-2}}(1+x) + \log_2\left(\sqrt{2-3x-4x^2} - \sqrt{x}\right)$

$\Leftrightarrow \log_2\sqrt{1-x} + \log_2\sqrt{1+x} \ge \log_2\left(\sqrt{2-3x-4x^2} - \sqrt{x}\right)$

$\Leftrightarrow \log_2\left(\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}\right) \ge \log_2\left(\sqrt{2-3x-4x^2} - \sqrt{x}\right)$

$\Leftrightarrow \sqrt{1-x}\sqrt{1+x} \ge \sqrt{2-3x-4x^2} - \sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{1-x^2} \ge \sqrt{2-3x-4x^2}$

Bình phương hai vế không âm ta được: $x+1-x^2+2\sqrt{x\left(1-x^2\right)} \ge 2-3x-4x^2$

$\Leftrightarrow 3x^2+4x-1+2\sqrt{x^2+x}\sqrt{1-x} \ge 0 \Leftrightarrow 3\left(x^2+x\right)+2\sqrt{x^2+x}\sqrt{1-x}-(1-x) \ge 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+x}+\sqrt{1-x}\right)\left(3\sqrt{x^2+x}-\sqrt{1-x}\right) \ge 0 \ (*)$

Do $x \in \left[0; \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \sqrt{x^2+x}+\sqrt{1-x} > 0$.

Bất phương trình $(*)$ tương đương với: $3\sqrt{x^2+x}-\sqrt{1-x} \ge 0$

$\Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+x} \ge \sqrt{1-x} \Leftrightarrow 9\left(x^2+x\right) \ge 1-x \Leftrightarrow 9x^2+10x-1 \ge 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge \dfrac{-5+\sqrt{34}}{9} \\ x \le \dfrac{-5-\sqrt{34}}{9} \end{array}\right.$. Kết hợp với điều kiện xác định $\Rightarrow x \in \left[\dfrac{-5+\sqrt{34}}{9}; \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$.

Kết luận: Vậy tập nghiệm của bất phương trình: $S=\left[\dfrac{-5+\sqrt{34}}{9};\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$.

Bài 6: Giải bất phương trình:

$$\frac{3}{2}+\log_2\left(2x^2+3x\right)+\log_4\left(x+2\right)\ge\log_2\left(2x^3+7x^2+14x+12\right).$$

Điều kiện xác định: $\begin{cases}2x^2+3x>0\\x+2>0\\2x^3+7x^2+14x+12>0\end{cases}\Leftrightarrow x>0.$

Bất phương trình tương đương với:

$\log_2\sqrt{8}+\log_2\left(2x^2+3x\right)+\log_{2^2}\left(x+2\right)\ge\log_2\left(2x^3+7x^2+14x+12\right)$

$\Leftrightarrow\log_2 2\sqrt{2}+\log_2\left(2x^2+3x\right)+\log_2\sqrt{x+2}\ge\log_2\left(2x^3+7x^2+14x+12\right)$

$\Leftrightarrow\log_2\left[\left(4x^2+6x\right)\sqrt{2x+4}\right]\ge\log_2\left(2x^3+7x^2+14x+12\right)$

$\Leftrightarrow\left(4x^2+6x\right)\sqrt{2x+4}\ge 2x^3+7x^2+14x+12\Leftrightarrow 2x\left(2x+3\right)\sqrt{2x+4}\ge\left(2x+3\right)\left(x^2+2x+4\right)$

$\Leftrightarrow\left(2x+3\right)\left(x^2+2x+4-2x\sqrt{2x+4}\right)\le 0\Leftrightarrow\left(2x+3\right)\left(x-\sqrt{2x+4}\right)^2\le 0$

Do: $x>0\Rightarrow 2x+3>0$, suy ra bất phương trình tương đương với: $\left(x-\sqrt{2x+4}\right)^2\le 0$

Mặt khác: $\left(x-\sqrt{2x+4}\right)^2\ge 0\,\forall x>0$. Do đó ta có: $x-\sqrt{2x+4}=0\Leftrightarrow x=\sqrt{2x+4}$

$\Leftrightarrow x^2=2x+4$ (Do 2 vế không âm) $\Leftrightarrow x^2-2x-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1+\sqrt{5}\left(TM\right)\\x=1-\sqrt{5}\left(L\right)\end{array}\right.\Leftrightarrow x=1+\sqrt{5}$.

Kết luận: Vậy bất phương trình có nghiệm duy nhất: $x=1+\sqrt{5}$.

Bài 7: Giải phương trình: $\log_3(x-1)=\log_{27}(x^2-2x+1)+\log_9(x-7+2\sqrt{x-8})$.

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x-1>0 \\ x^2-2x+1>0 \\ x-7+2\sqrt{x-8}>0 \\ x-8\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 8.$

Phương trình đã cho tương đương với: $\log_3(x-1)-\log_{3^3}(x-1)^2=\log_{3^2}(x-8+2\sqrt{x-8}+1)$

$\Leftrightarrow \log_3(x-1)-\log_3\sqrt[3]{(x-1)^2}=\log_3\sqrt{x-8+2\sqrt{x-8}+1} \Leftrightarrow \log_3\left(\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\right)=\log_3\sqrt{\left(\sqrt{x-8}+1\right)^2}$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x-1}=\sqrt{\left(\sqrt{x-8}+1\right)^2}=\sqrt{x-8}+1$

Đặt $u=\sqrt[3]{x-1}\Rightarrow u^3=x-1\Leftrightarrow x=u^3+1$.

Thay vào phương trình ta có: $u=\sqrt{u^3-7}+1$

$\Leftrightarrow u-1=\sqrt{u^3-7}\Leftrightarrow \begin{cases} u-1\ge 0 \\ (u-1)^2=u^3-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u\ge 1 \\ u^3-u^2+2u-8=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u\ge 1 \\ (u-2)(u^2+u+4)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u\ge 1 \\ \left[\begin{array}{l} u-2=0 \\ u^2+u+4=0\ (VN) \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow u=2\Rightarrow x=9\ (TM).$

Kết luận: Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất: $x=9$.

Bài 8: Giải phương trình: $\ln\left(x-\sqrt{x+3}\right)+\dfrac{1}{2}\ln\left(2x^2+2x+6\right)=\ln\left(x^2-x-3\right)$.

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x-\sqrt{x+3}>0 \\ 2x^2+2x+6>0 \\ x^2-x-3>0 \\ x+3\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}.$

Ta có phương trình trở thành: $\ln\left(x-\sqrt{x+3}\right)+\ln\sqrt{2x^2+2x+6}=\ln\left(x^2-x-3\right)$

$\Leftrightarrow \ln\left[\left(x-\sqrt{x+3}\right)\sqrt{2x^2+2x+6}\right]=\ln\left(x^2-x-3\right)$

$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{x+3}\right)\left(\sqrt{2x^2+2x+6}\right)=x^2-x-3=\left(x-\sqrt{x+3}\right)\left(x+\sqrt{x+3}\right)$

Trường hợp 1: Với $x-\sqrt{x+3}=0 \Leftrightarrow x=\sqrt{x+3} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x^2=x+3 \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

Trường hợp 2: Với $\sqrt{2x^2+2x+6}=x+\sqrt{x+3}$.
Do 2 vế không âm, bình phương hai vế ta được:

$2x^2+2x+6=x^2+x+3+2x\sqrt{x+3} \Leftrightarrow x^2-2x\sqrt{x+3}+x+3=0$

$\Leftrightarrow \left(x-\sqrt{x+3}\right)^2=0 \Leftrightarrow x-\sqrt{x+3}=0 \Rightarrow x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

Kết luận: Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất: $x=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$.

Bài 9: Giải phương trình:

$$\log_2\left(x^2+16x+19\right)=1+\log_2\left(x+2\right)+\log_2\left(\sqrt{2x^2+16x+18}-\sqrt{x^2-1}\right).$$

Điều kiện xác định : $\begin{cases} x^2+16x+19>0 \\ x+2>0 \\ \sqrt{2x^2+16x+18}-\sqrt{x^2-1}>0 \\ 2x^2+16x+18\ge 0 \\ x^2-1\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\left(-8+3\sqrt{5};-1\right]\cup\left[1;+\infty\right)$.

Ta biến đổi phương trình trở thành:

$\log_2\left(x^2+16x+19\right)=\log_2 2+\log_2\left(x+2\right)+\log_2\left(\sqrt{2x^2+16x+18}-\sqrt{x^2-1}\right)$

$\Leftrightarrow \log_2\left(x^2+16x+19\right)=\log_2\left[2\left(x+2\right)\left(\sqrt{2x^2+16x+18}-\sqrt{x^2-1}\right)\right]$

$$\Leftrightarrow x^2+16x+19=2(x+2)\left(\sqrt{2x^2+16x+18}-\sqrt{x^2-1}\right)$$

$$\Leftrightarrow x^2+16x+19=\frac{2(x+2)\left(x^2+16x+19\right)}{\sqrt{2x^2+16x+18}+\sqrt{x^2-1}}$$

Trường hợp 1: Với: $x^2+16x+19=0 \Leftrightarrow x=-8\pm 3\sqrt{5}$.

Trường hợp 2: Với : $\sqrt{2x^2+16x+18}+\sqrt{x^2-1}=2(x+2) \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+16x+18}=2(x+2)-\sqrt{x^2-1}$

Bình phương hai vế ta được: $2x^2+16x+18=4(x+2)^2+\left(x^2-1\right)-4(x+2)\sqrt{x^2-1}$

$$\Leftrightarrow 4(x+2)\sqrt{x^2-1}=3x^2-3 \Leftrightarrow 4(x+2)\sqrt{x^2-1}-3\left(x^2-1\right)=0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-1}\left(4x+8-3\sqrt{x^2-1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2-1}=0\\ 4x+8-3\sqrt{x^2-1}=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-1=0\;(1)\\ 4x+8=3\sqrt{x^2-1}\;(2)\end{array}\right.$$

Giải (1): $x^2-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-1\end{array}\right.$.

Giải (2): $4x+8=3\sqrt{x^2-1} \Leftrightarrow \begin{cases}4x+8\geq 0\\ (4x+8)^2=9\left(x^2-1\right)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\geq -2\\ \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{-32+3\sqrt{57}}{7}\\ x=\dfrac{-32-3\sqrt{57}}{7}\end{array}\right.\end{cases}$

Kết hợp với điều kiện xác định, ta thu được các nghiệm: $x=1$ và $x=-1$

Kết luận: Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm: $x=1$ và $x=-1$.

Bài 10: Giải phương trình: $1+\log_{\frac{1}{3}}\left(\sqrt{2x^2-7}+\sqrt{2x^2-4}\right)=\log_3\left(x-\sqrt{x^2-3}\right)$.

Điều kiện xác định: $\begin{cases} \sqrt{2x^2-7}+\sqrt{2x^2-4}>0 \\ x-\sqrt{x^2-3}>0 \\ 2x^2-7\ge 0 \\ 2x^2-4\ge 0 \\ x^2-3\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge \dfrac{\sqrt{14}}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với:

$$\log_3 3+\log_{3^{-1}}\left(\sqrt{2x^2-7}+\sqrt{2x^2-4}\right)=\log_3\left(x-\sqrt{x^2-3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \log_3 3-\log_3\left(\sqrt{2x^2-7}+\sqrt{2x^2-4}\right)=\log_3\left(x-\sqrt{x^2-3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \log_3\left(\frac{3}{\sqrt{2x^2-7}+\sqrt{2x^2-4}}\right)=\log_3\left(x-\sqrt{x^2-3}\right)\Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{2x^2-7}+\sqrt{2x^2-4}}=x-\sqrt{x^2-3}$$

$$\Leftrightarrow 3=\left(\sqrt{2x^2-7}+\sqrt{2x^2-4}\right)\left(x-\sqrt{x^2-3}\right)\Leftrightarrow 3=\frac{3\left(\sqrt{2x^2-7}+\sqrt{2x^2-4}\right)}{x+\sqrt{x^2-3}}$$

$$\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2-3}=\sqrt{2x^2-7}+\sqrt{2x^2-4}\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-4}-\sqrt{x^2-3}=x-\sqrt{2x^2-7}$$

$$\Rightarrow\left(\sqrt{2x^2-4}-\sqrt{x^2-3}\right)^2=\left(x-\sqrt{2x^2-7}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2-7-2\sqrt{2x^2-4}\sqrt{x^2-3}=3x^2-7-2x\sqrt{2x^2-7}\Leftrightarrow \sqrt{2x^2-4}\sqrt{x^2-3}=x\sqrt{2x^2-7}$$

Do 2 vế không âm, bình phương tiếp hai vế ta được:

$$\left(\sqrt{2x^2-4}\sqrt{x^2-3}\right)^2=x^2\left(2x^2-7\right)\Leftrightarrow -3x^2+12=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-2 \end{array}\right.$$

Kết hợp điều kiện xác định, ta được: $x=2$.

Kết luận: Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất: $x=2$.

Bài 11: Giải phương trình:

$$1+\log_2(x+1)+\log_4(2x-1)+\log_{0,25}(2x^3-x^2+6x-3)=\log_4(x^2+x+2).$$

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x+1>0 \\ 2x-1>0 \\ 2x^3-x^2+6x-3>0 \\ x^2+x+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>\dfrac{1}{2}.$

Phương trình tương đương với:

$$\log_2 2+\log_2(x+1)+\log_{2^2}(2x-1)+\log_{2^{-2}}(2x^3-x^2+6x-3)=\log_{2^2}(x^2+x+2)$$

$$\Leftrightarrow \log_2 2+\log_2(x+1)+\log_2\sqrt{2x-1}=\log_2\sqrt{2x^3-x^2+6x-3}+\log_2\sqrt{x^2+x+2}$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left[2(x+1)\sqrt{2x-1}\right]=\log_2\left(\sqrt{2x^3-x^2+6x-3}\sqrt{x^2+x+2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2(x+1)\sqrt{2x-1}=\sqrt{2x^3-x^2+6x-3}\sqrt{x^2+x+2}$$

$$\Leftrightarrow 2(x+1)\sqrt{2x-1}=\sqrt{2x-1}\sqrt{x^2+3}\sqrt{x^2+x+2}.$$

Vì $x>\dfrac{1}{2}$, phương trình tương đương với: $2(x+1)=\sqrt{x^2+3}\sqrt{x^2+x+2}$.

Do 2 vế không âm, bình phương hai vế ta được: $4(x+1)^2=(x^2+3)(x^2+x+2)$

$$\Leftrightarrow x^4+x^3+x^2-5x+2=0 \Leftrightarrow (x-1)(x^3+2x^2+3x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ x^3+2x^2+3x-2=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1(TM) \\ x^3+2x^2+3x-2=0(*) \end{array}\right.$$

Ta cần chứng minh phương trình (*) vô nghiệm trên miền xác định.

Xét hàm số $f(x)=x^3+2x^2+3x-2$ với $x>\dfrac{1}{2}$. Ta có: $f'(x)=3x^2+4x+3>0$.

Bảng biến thiên:

x	$\frac{1}{2}$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$\frac{1}{8}$ $\nearrow$ $+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình $x^3+2x^2+3x-2=0$ vô nghiệm với $x>\frac{1}{2}$.

Như vậy phương trình chỉ có 1 nghiệm duy nhất $x=1$ (Thỏa mãn điều kiện)

Kết luận: Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất: $x=1$.

Bài 12: Giải phương trình:

$$\log_3\left(\frac{8}{\sqrt{2x+7}+\sqrt{2x-1}}\right)+\log_{\frac{1}{3}}\left(\sqrt{x+8}-\sqrt{x}\right)=\log_3\left(\frac{x+4-\sqrt{x^2+8x}}{2x+3-\sqrt{4x^2+12x-7}}\right).$$

Điều kiện xác định: $x\ge\frac{1}{2}$.

Phương trình đã cho tương đương với :

$$\log_3\left(\frac{8}{\sqrt{2x+7}+\sqrt{2x-1}}\right)-\log_3\left(\sqrt{x+8}-\sqrt{x}\right)=\log_3\left(\frac{x+4-\sqrt{x^2+8x}}{2x+3-\sqrt{4x^2+12x-7}}\right)$$

$$\Leftrightarrow\log_3\left(\frac{8}{\sqrt{2x+7}+\sqrt{2x-1}}.\frac{1}{\sqrt{x+8}-\sqrt{x}}\right)=\log_3\left(\frac{x+4-\sqrt{x^2+8x}}{2x+3-\sqrt{4x^2+12x-7}}\right)$$

$$\Leftrightarrow\frac{8}{\sqrt{2x+7}+\sqrt{2x-1}}.\frac{1}{\sqrt{x+8}-\sqrt{x}}=\frac{x+4-\sqrt{x^2+8x}}{2x+3-\sqrt{4x^2+12x-7}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\left(\sqrt{2x+7}+\sqrt{2x-1}\right)\left(\sqrt{2x+7}-\sqrt{2x-1}\right)}{\sqrt{2x+7}+\sqrt{2x-1}}.\frac{1}{\sqrt{x+8}-\sqrt{x}}=\frac{2x+8-2\sqrt{x^2+8x}}{4x+6-2\sqrt{4x^2+12x-7}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2x+7}-\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x+8}-\sqrt{x}}=\frac{x+(x+8)-2\sqrt{x}\sqrt{x+8}}{(2x+7)+(2x-1)-2\sqrt{2x+7}\sqrt{2x-1}}=\frac{\left(\sqrt{x+8}-\sqrt{x}\right)^2}{\left(\sqrt{2x+7}-\sqrt{2x-1}\right)^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x+8}-\sqrt{x}\right)^3=\left(\sqrt{2x+7}-\sqrt{2x-1}\right)^3 \Leftrightarrow \sqrt{x+8}-\sqrt{x}=\sqrt{2x+7}-\sqrt{2x-1}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x+7}+\sqrt{x}=\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+8}.$$

Bình phương hai vế ta được:

$$3x+7+2\sqrt{2x+7}\sqrt{x}=3x+7+2\sqrt{2x-1}\sqrt{x+8} \Leftrightarrow \sqrt{2x+7}\sqrt{x}=\sqrt{2x-1}\sqrt{x+8} \Leftrightarrow x=1.$$

Kết luận: Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất: $x=1$.